Comprender mejor el volumen

4

ACTIVIDAD PREVIA

Determina cada mínimo común múltiplo.

1. MCM(2, 10)
2. MCM(3, 8)
3. MCM(6, 14)
4. MCM(10, 15)

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Determinar el volumen de los prismas rectos rectangulares con longitudes fraccionarias del borde utilizando cubos unitarios con dimensiones fraccionarias unitarias.
- Determinar el número de cubos con dimensiones fraccionarias unitarias que tienen el mismo volumen que un cubo unitario.
- Determinar el número de cubos de unidad con dimensiones fraccionarias unitarias que pueden llenar un prisma rectangular con longitudes fraccionarias de la arista.
- Conecta las fórmulas de volumen $V = lah$ y $V = Bh$ con un modelo de cubo de unidad de volumen para prismas rectangulares.

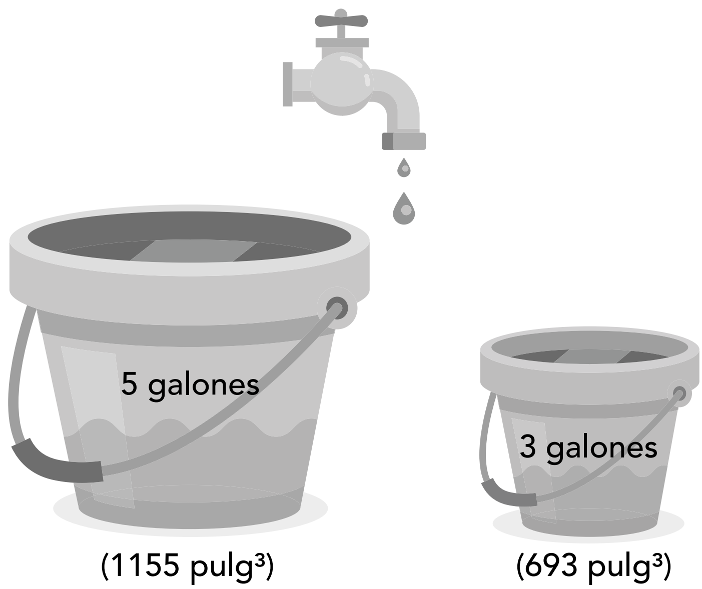
TÉRMINOS CLAVE

- volumen
- sólido geométrico
- poliedro
- cara
- arista
- vértice
- cubo unitario
- prisma recto rectangular
- cubo

Sabes acerca de las figuras tridimensionales como los cubos y otros prismas rectangulares. También sabes cómo hacer operaciones con números racionales positivos. ¿Cómo puedes calcular las medidas de cualquier prisma rectangular, incluso uno con longitudes fraccionarias del borde?

Medir agua

Tienes dos recipientes vacíos con un volumen diferente, como se muestra. También tienes una fuente de agua.



Recuerda…

El **volumen** es la cantidad de espacio que ocupa un objeto. El volumen de un objeto se mide en unidades cúbicas.

1. Utilizando solo estos recipientes, ¿cómo puedes medir un volumen de exactamente 4 galones (924 pulg.³)?

ACTIVIDAD
4.1 Volumen del prisma

Recuerda que un polígono es una figura cerrada formada por tres o más segmentos de recta. Un **sólido geométrico** es una figura geométrica tridimensional acotada. Un **poliedro** es una figura sólida tridimensional formada por polígonos. Una **cara** es uno de los polígonos que forman un poliedro. Una **arista** es la intersección de dos caras de una figura tridimensional. El punto en donde se unen varios bordes de una figura tridimensional se conoce como un **vértice** de una figura tridimensional.

Figura A

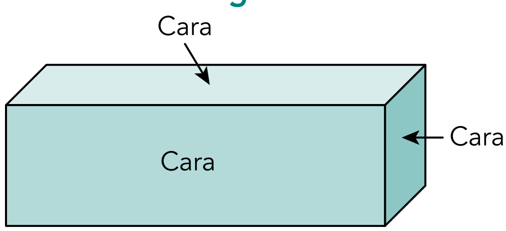
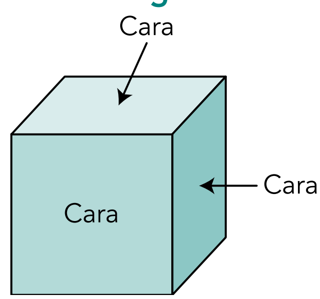


Figura B

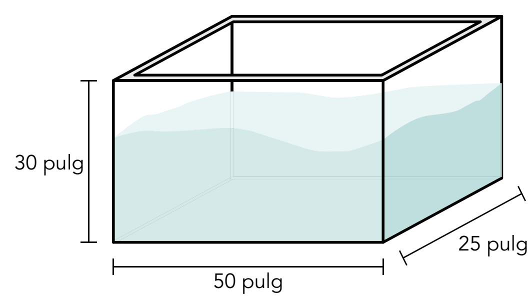


¿Sabías que?

Un **cubo de unidad** es un cubo cuyos lados son todos de 1 unidad de largo.

La Figura A es un *prisma recto rectangular*. Un **prisma recto rectangular** es un poliedro con tres pares de caras rectangulares congruentes y paralelas. La Figura B es un ejemplo de un *cubo*, que es un tipo especial de prisma recto rectangular. Un **cubo** es un poliedro que tiene cuadrados congruentes como caras.

1. Considera la pecera que se muestra.



a. ¿Cómo puedes determinar el volumen de la pecera?

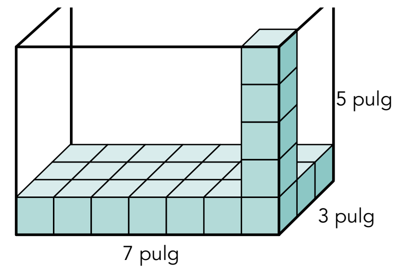
b. ¿Cuántas pulgadas cúbicas de agua puede alojar la pecera?

2. Una maceta en forma de prisma rectangular tiene una longitud de 3 pies, un ancho de 1 pie y una altura de $1\frac{1}{2}$ pies. ¿Cuánta tierra para maceta puede alojar la maceta?

Recuerda que puedes calcular el volumen de un prisma rectangular llenándolo de cubos de unidad.

EJEMPLO PRÁCTICO

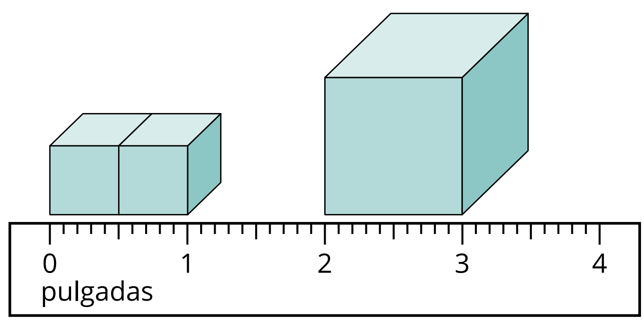
El prisma mostrado se puede llenar con 7 cubos de unidad a lo largo de su longitud, 3 cubos de unidad a lo largo de su ancho y 5 cubos de unidad a lo largo de su altura.



Hay 7×3, ó 21, cubos de unidad en cada capa y hay 5 capas de cubos.

Por lo tanto, el prisma se puede llenar con un total de 21×5, ó 105 cubos de unidad. Tiene un volumen de 105 pulgadas cúbicas.

Considera un cubo que tiene longitudes laterales cada una de $\frac{1}{2}$ pulgadas.



Cada lado del cubo de $\frac{1}{2}$ pulgada tiene la mitad de longitud de un cubo unitario, así que se necesitan dos de estos cubos para medir la misma longitud que un cubo de 1 pulgada.

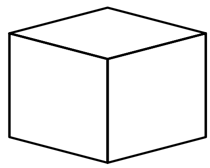
Considera llenar el prisma del Ejemplo práctico con cubos de $\frac{1}{2}$ pulgada.

3. Phillip dice que necesitará el doble de cubos para llenar el prisma. Mara dice que necesitará cuatro veces la cantidad de cubos para llenar el prisma. Daniel dice que necesitará ocho veces la cantidad de cubos para llenar el prisma. ¿Quién tiene razón?

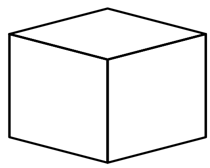
NOTAS

4. **Determina cuántos de cada cubo de unidad fraccionaria se necesitan para llenar un cubo de unidad. Dibuja los cubos de unidades fraccionarias en el cubo de unidad vacío. Después, determina el volumen de cada cubo de unidad fraccionaria.**

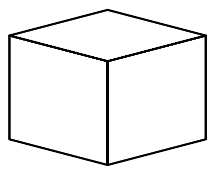
   a. $\frac{1}{2}$ **cubo de unidad**

   b. $\frac{1}{4}$ **cubo de unidad**

   c. $\frac{1}{3}$ **cubo de unidad**

5. **¿Cómo determinaste el número de cubos de unidad fraccionarias que llenaron el cubo de unidad?**

6. **Describe cualquier patrón que hayas observado entre el tamaño del cubo de unidades fraccionarias y el número de los cubos que llenan el cubo de unidad.**

Considera las fórmulas de volumen de un prisma y el área de un rectángulo:

$$V = l \cdot a \cdot h$$
$$A = l \cdot a$$

Si utilizas B para representar el área de la base de un prisma rectangular, entonces puedes reescribir la fórmula para el área: $B = l \cdot$ a.

Usando ambas fórmulas, puedes reescribir la fórmula para el volumen de un prisma rectangular como $V = B \cdot h$, donde V representa el volumen, B representa el área de la base y h representa la altura.

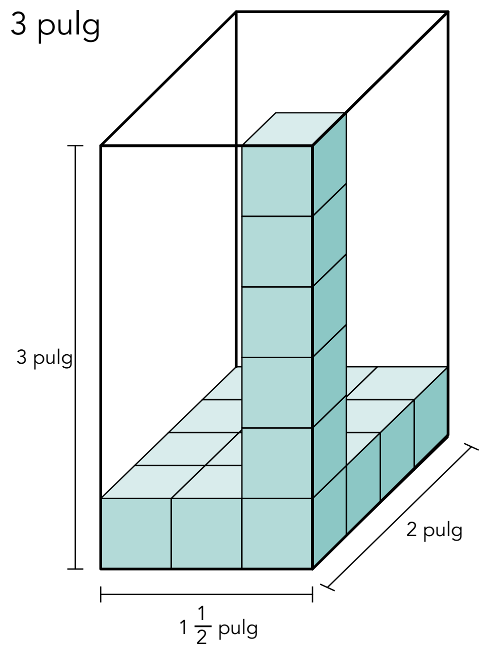
ACTIVIDAD
4.2

Llenar un prisma con cubos de unidad fraccionaria

Piensa en llenar un prisma rectangular con cubos de unidades fraccionarios para determinar su volumen.

EJEMPLO PRÁCTICO

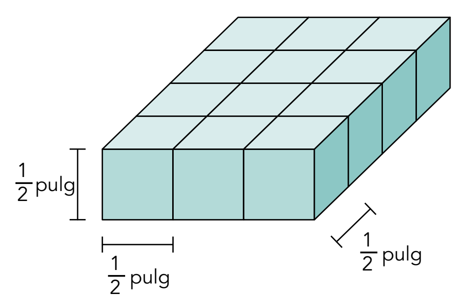
Considera el cubo con dimensiones $1\frac{1}{2}$ pulg × 2 pulg × 3 pulg



Paso 1: Llena la base del prisma con cubos de $\frac{1}{2}$ pulgada.

Paso 2: Analiza la capa base de cubos de unidades fraccionarias que llenan el prisma.

Hay 3 × 4, ó 12, cubos que cada uno tiene un volumen de $\frac{1}{8}$ pulgada cúbica en la base.



Paso 3: Determina el número de cubos de unidades fraccionarias que llenan el prisma.

Hay 6 capas de cubos que componen la altura del prisma, por lo que hay 6 × 12, ó 72 cubos que cada uno tiene un volumen de $\frac{1}{8}$ de pulgada cúbica en el prisma.

Paso 4: Determina el volumen del prisma.

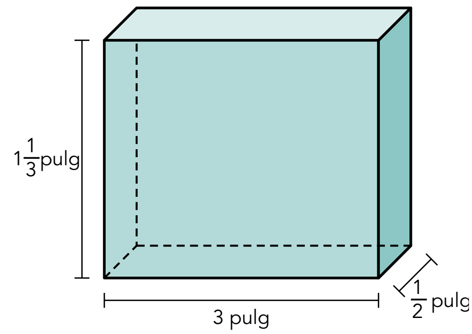
$72 \times \frac{1}{8}$ pulgada cúbica
= 9 pulgadas cúbicas

Paso 5: Utiliza la fórmula del volumen para comprobar tu respuesta.

$V = 1\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3$
$= \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 3$
= 9 pulgadas cúbicas

1. ¿Importa el tamaño del cubo de unidad fraccionaria que utilices para llenar el prisma rectangular correcto en el Ejemplo práctico? Da ejemplos para explicar tu razonamiento.

Considera abarcar el prisma rectangular que se muestra con cubos de unidad fraccionaria para determinar su volumen. ¿Cómo puedes determinar qué tamaño de cubo utilizar?



EJEMPLO PRÁCTICO

Identifica el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores de fracción para determinar las dimensiones de cada cubo.	MCM(2, 3) = 6 Entonces, cada cubo medirá $\frac{1}{6}$ pulg $\times$ $\frac{1}{6}$ pulg $\times$ $\frac{1}{6}$ pulg El volumen de cada cubo de unidad es $\frac{1}{216}$ pulgadas cúbicas.
Determinar el número de cubos de unidad necesario para llenar el prisma en cada dimensión.	longitud: $3 \div \frac{1}{6} = 18$ ancho: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} = 3$ altura: $1\frac{1}{3} \div \frac{1}{6} = 8$
Determinar el número total de cubos de unidad que componen el prisma rectangular recto.	$(18)(3)(8) = 432$
Multiplica el número total de cubos de unidad por el volumen de cada cubo para determinar el volumen del prisma rectangular recto.	$432\left(\frac{1}{216}\right) = 2$

El volumen del prisma rectangular recto es 2 pulgadas cúbicas.

2. Interpreta el ejemplo práctico.

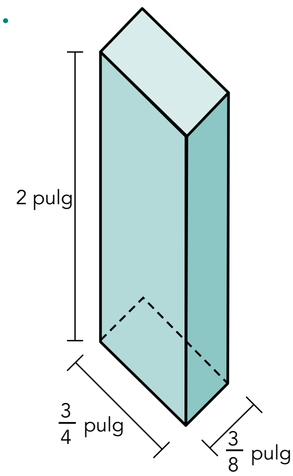
a. ¿Cómo se determinó el número de cubos de unidad necesarios para llenar el prisma en cada dimensión?

b. En lugar de cubos de $\frac{1}{6}$pulgada, supongamos que usaste cubos de $\frac{1}{12}$pulgada. ¿Cómo cambia esto el volumen del prisma rectangular?

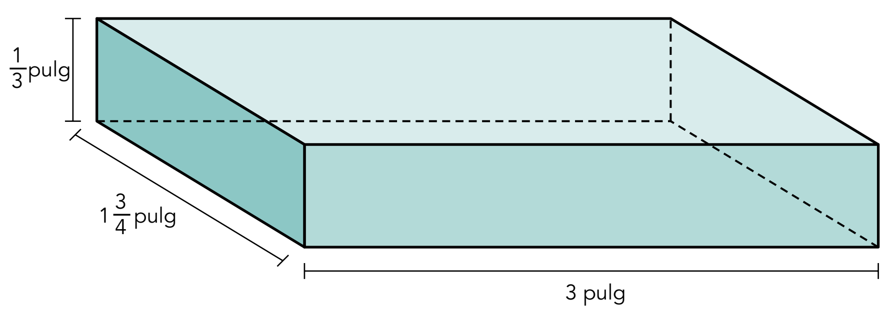
c. **¿Cuál es otra forma de determinar el volumen del prisma sin llenarlo con cubos?**

3. **Utiliza el método del ejemplo práctico para determinar el volumen de cada prisma rectangular. Después, utiliza la fórmula de volumen para comprobar tu respuesta.**

a.



b.

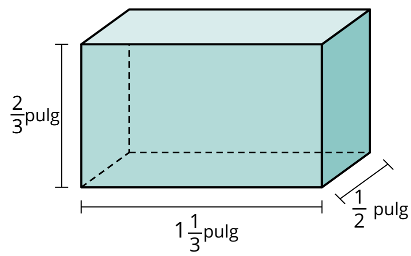


ACTIVIDAD
4.3

Resolver problemas de volumen

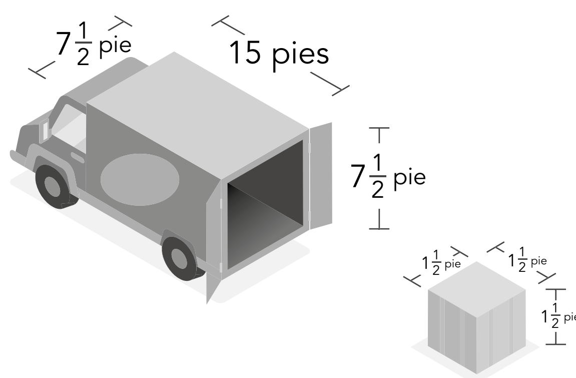
Utiliza el método de fracción unitaria para resolver cada problema de volumen.

1. Calcula el volumen del prisma rectangular recto.



2. Arlene llena un camión de mudanza con cajas en forma de cubo que tienen longitudes laterales de $1\frac{1}{2}$ pies. La parte posterior del camión es un prisma rectangular con las dimensiones $7\frac{1}{2}$ pies por 15 pies por $7\frac{1}{2}$ pies.

a. ¿Cuál es el volumen de cada caja?



b. Determina el número de cajas que llenen completamente la parte de atrás del camión.

c. Calcula el volumen de la parte de atrás del camión de mudanzas.

NOTAS

DEMUESTRA lo que SABES

Fraccionariamente lleno

Resuelve cada problema. Muestra tu trabajo.

1. **Determina el volumen de un prisma rectangular recto con dimensiones $1\frac{1}{4}$ pies × 1 pie × $\frac{1}{2}$ pie usando el método de fracción unitaria que aprendiste en esta lección.**

2. **Haley hace pendientes y los guarda en cajas cúbicas que miden $\frac{1}{6}$ pie de ancho. ¿Cuántas cajas cúbicas de $\frac{1}{6}$ pie puede ubicar en una caja de envío que mide $1\frac{1}{6}$ pies por $\frac{1}{3}$ pie por $\frac{1}{3}$ pie?**

3. **El director deportivo de la escuela tiene un armario de almacenamiento que mide $4\frac{1}{2}$ pies de largo, $2\frac{2}{3}$ pies de profundidad y 6 pies de alto.**

   a. **Ella quiere poner alfombra en el armario. ¿Cuánta alfombra necesitará?**

   b. **El director deportivo quiere almacenar cajas con forma de cubo de $\frac{1}{2}$ pie de ancho. ¿Cuántas cajas guardará en el armario de almacenamiento?**